Momento angular en mecánica cuántica.

- Importancia del momento angular:

clásico
- Clásicamente para un sistema aislado $\mathcal{L}$ es una constante de movimiento.
- Clásicamente para una partícula en un potencial central $\mathcal{L}$=cte.
  - ⇒ el mov ocurre en un plano
  - ⇒ obedece 2ª ley de Kepler: A igual en t igual.

Cuánticamente:
$\mathcal{L}$ está asociado con un observable $\vec{L}=(L_x, L_y, L_z)$

- Veremos que en un potencial central L_x, L_y y L_z son ctes de mov.
- Esto ayudará a obtener y clasificar los eV de H.

H y operadores de m.a. son CCOC.

- Denotaremos con $\vec{L}$ momento angular orbital a momentos angulares con análogo clásico.

- $\vec{S}$ momento angular de espín. Sin análogo clásico.

- En un átomo, los distintos $\vec{L}_i$ se combinan con los $\vec{S}_i$ y obtenemos $\vec{J}$ momento angular total.
  También usamos J para hablar de m.a. en general.

- Obtendremos las propiedades de $\vec{J}$ a partir de reglas de conmutación.

- Para $\vec{L}$ estas reglas se siguen $[X,P]=i\hbar$

- Para $\vec{S}$ tomaremos las reglas conmutación como def. pero luego veremos que tienen un origen geométrico.

- Reglas de conmutación pa $\vec{L}$

$$\vec{L}=\vec{R}\times\vec{P}$$

$$\mathcal{L}_x = yp_z - zp_y$$

- Como $[Y,P_z]=0$ y $[Z,P_y]=0$ no es necesario simetrizar.

$$\Rightarrow L_x = YP_z - ZP_y$$

$$\mathbf{r}\cdot\mathbf{p} = xp_x + yp_y + zp_z \qquad \text{(B-35)}$$

In classical mechanics, the scalar product $\mathbf{r}\cdot\mathbf{p}$ is commutative, and one can just as well write:

$$\mathbf{p}\cdot\mathbf{r} = p_x x + p_y y + p_z z \qquad \text{(B-36)}$$

But when $\mathbf{r}$ and $\mathbf{p}$ are replaced by the corresponding observables $\mathbf{R}$ and $\mathbf{P}$, the operators obtained from (B-35) and (B-36) are not identical [see relations (B-33)]:

$$\mathbf{R}\cdot\mathbf{P} \neq \mathbf{P}\cdot\mathbf{R} \qquad \text{(B-37)}$$

Moreover, neither $\mathbf{R}\cdot\mathbf{P}$ nor $\mathbf{P}\cdot\mathbf{R}$ is Hermitian:

$$(\mathbf{R}\cdot\mathbf{P})^\dagger = (XP_x + YP_y + ZP_z)^\dagger = \mathbf{P}\cdot\mathbf{R} \qquad \text{(B-38)}$$

To the preceding postulates, therefore, must be added a symmetrization rule. For example, the observable associated with $\mathbf{r}\cdot\mathbf{p}$ will be:

$$\frac{1}{2}(\mathbf{R}\cdot\mathbf{P} + \mathbf{P}\cdot\mathbf{R}) \qquad \text{(B-39)}$$

which is indeed Hermitian. For an observable which is more complicated than $\mathbf{R}\cdot\mathbf{P}$, an analogous symmetrization is to be performed.

> The observable A which describes a classically defined physical quantity $\mathcal{A}$ is obtained by replacing, in the suitably symmetrized expression for $\mathcal{A}$, $\mathbf{r}$ and $\mathbf{p}$ by the observables $\mathbf{R}$ and $\mathbf{P}$ respectively.

- Análogamente L_y, L_z

$$\Rightarrow \vec{L} = \vec{R}\times\vec{P}$$

$$-[L_x, L_y] = [YP_z - ZP_y, ZP_x - XP_z]$$

$$= \underbrace{[YP_z, ZP_x]}_{Z \text{ y } P_z \text{ no conmutan}} - \cancel{[YP_z, XP_z]} - \cancel{[ZP_y, ZP_x]} + \underbrace{[ZP_y, XP_z]}_{Z \text{ y } P_z \text{ no conmutan.}}$$

$$= YP_x[P_z, Z] + XP_y[Z, P_z]$$

$$= -i\hbar YP_x + i\hbar XP_y$$

$$= i\hbar L_z$$

- Análogo

$$-[L_x, L_y] = i\hbar L_z \;;\; [L_z, L_x] = i\hbar L_y \;;\; [L_y, L_z] = i\hbar L_x$$

$\therefore$ No podemos medir L_x, L_y y L_z simultáneamente.

- Usando el Tensor de Levi-Civita

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} +1 & \text{if } (i,j,k) \text{ is } (1,2,3), (2,3,1), \text{ or } (3,1,2), \\ -1 & \text{if } (i,j,k) \text{ is } (3,2,1), (1,3,2), \text{ or } (2,1,3), \\ 0 & \text{if } i=j, \text{ or } j=k, \text{ or } k=i \end{cases}$$

(i,j,k)

Par dos vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$

- $(\vec{A}\times\vec{B})_k = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} \epsilon_{ijk} A_i B_j$

- Con notación de Einstein $(\vec{A}\times\vec{B})_i = \epsilon_{ijk} A_j B_k$

- Las reglas de conmutación quedan

$$[L_i, L_j] = i\hbar \epsilon_{ijk} L_k$$

- Definición de momento angular

Un momento angular $\vec{J}$ es aquél que satisface

$$[J_x, J_y] = i\hbar J_z$$
$$[J_y, J_z] = i\hbar J_x$$
$$[J_z, J_x] = i\hbar J_y$$

Definimos también

$$J^2 = J_x^2 + J_y^2 + J_z^2$$

Nota: J^2 es Hermitiano pues J_x, J_y, J_z lo son.

Conmutadores importantes

Veamos que $[J^2, J_i] = 0$

$$[J^2, J_x] = [J_x^2 + J_y^2 + J_z^2, J_x] = [J_y^2, J_x] + [J_z^2, J_x]$$

$[J_x, J_x] = 0$

$$[J_y^2, J_x] = J_y[J_y, J_x] + [J_y, J_x]J_y$$
$$= -i\hbar J_y J_z - i\hbar J_z J_y$$

$$[J_z^2, J_x] = J_z[J_z, J_x] + [J_z, J_x]J_z$$
$$= i\hbar J_z J_y + i\hbar J_y J_z$$

$\therefore [J^2, J_x] = 0$

Análogamente $[J^2, J_y] = [J^2, J_z] = 0$

$\therefore$ Podemos medir J^2 junto con L_x, L_y o L_z

Para un potencial central

L^2, L_x, L_y, L_z son ctes. de mov.
Pero no conmutan entre sí.

Podemos construir una base de eV comunes a H, L^2 y L_z (p/ejemplo) (hablar de eje de cuantización.)

$\therefore$ Podemos medir J^2 y UNA componente simultáneamente.

Al eje que elegimos para describir al sistema se le llama eje de cuantización.

Se suele poner el eje de cuantización a lo largo de z.

Buscaremos e.V. comunes a J^2, J_z